Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 3 – Estadística y probabilidad

Lunes 8 de mayo de 2017 (tarde)

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[50 puntos]**.

2217 – 7230

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 10]

Un agricultor vende bolsas de patatas. Según él, la media de los pesos de dichas bolsas es $7\,\text{kg}$. Sin embargo, un inspector afirma que la media de los pesos es menor que $7\,\text{kg}$. Con el fin de comprobar si esta afirmación es o no cierta, el inspector toma una muestra aleatoria compuesta por 12 de estas bolsas y determina el peso, $x\,\text{kg}$, de cada bolsa. El inspector obtiene que

$$\sum x = 83{,}64;\ \sum x^2 = 583{,}05.$$

Puede suponer que los pesos de las bolsas de patatas siguen la distribución normal $\mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$.

(a) Indique hipótesis apropiadas para comprobar si la afirmación del inspector es o no cierta. [1]

(b) Halle estimaciones sin sesgo de μ y de σ^2. [3]

(c) (i) Realice un contraste adecuado e indique el valor del parámetro p que ha obtenido.

(ii) Utilizando un nivel de significación del 10% y justificando su respuesta, indique cuál es su conclusión en este contexto. [6]

2. [Puntuación máxima: 14]

La variable aleatoria continua X tiene la función de distribución acumulada F que viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ xe^{x-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

(a) Determine

(i) $P(0{,}25 \le X \le 0{,}75)$;

(ii) la mediana de X. [4]

(b) (i) Muestre que la función densidad de probabilidad de f de X, para $0 \le x \le 1$, viene dada por

$$f(x) = (x+1)e^{x-1}.$$

(ii) A partir de lo anterior, determine la media y la varianza de X. [6]

(c) (i) Indique el teorema central del límite.

(ii) De la distribución de X se toma una muestra aleatoria compuesta por 100 observaciones. Si $\overline{X}$ denota la media muestral, utilice el teorema central del límite para hallar un valor aproximado de $P(\overline{X} > 0{,}65)$. Dé la respuesta con una aproximación de dos lugares decimales. [4]

3. [Puntuación máxima: 9]

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad.

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} pq^{\frac{x}{2}} & \text{para } x = 0,\, 2,\, 4,\, 6 \ldots \text{ donde } \quad p + q = 1,\, 0 < p < 1. \\ 0 & \text{resto de valores} \end{cases}$$

(a) Muestre que la función generatriz de probabilidad para X viene dada por $G(t) = \dfrac{p}{1 - qt^2}$. [2]

(b) A partir de lo anterior, determine $\mathrm{E}(X)$ en función de p y q. [4]

(c) La variable aleatoria Y viene dada por $Y = 2X + 1$. Halle la función generatriz de probabilidad para Y. [3]

4. [Puntuación máxima: 10]

Las variables aleatorias X_1 y X_2 constituyen una muestra aleatoria tomada de $\mathrm{N}(\mu,\, 2\sigma^2)$.
Las variables aleatorias Y_1, Y_2 e Y_3 constituyen una muestra aleatoria tomada de $\mathrm{N}(2\mu,\, \sigma^2)$.
El estimador U se utiliza para estimar μ, donde $U = a(X_1 + X_2) + b(Y_1 + Y_2 + Y_3)$ y a, b son constantes.

(a) Sabiendo que U es un estimador sin sesgo, muestre que $2a + 6b = 1$. [3]

(b) Muestre que $\mathrm{Var}(U) = (39b^2 - 12b + 1)\sigma^2$. [3]

(c) A partir de lo anterior, halle

(i) el valor de a y el valor de b que proporcionan el mejor estimador sin sesgo de esta forma. Dé las respuestas en forma de fracciones.

(ii) la varianza de este mejor estimador sin sesgo. [4]

5. [Puntuación máxima: 7]

Un profesor decide utilizar las notas que ha obtenido una muestra aleatoria compuesta por 12 alumnos en el examen de Geografía y en el de Historia para investigar si existe o no una asociación positiva entre las notas que obtienen los alumnos en estas dos asignaturas. Puede suponer que la distribución de notas en ambas asignaturas es bidimensional normal.

(a) Indique hipótesis apropiadas para esta investigación. [1]

El profesor entrega las notas a Anne, una de sus alumnas, y le pide que utilice la calculadora para realizar un contraste adecuado a un nivel de significación del 5%. Anne le informa que el valor del parámetro p es igual a $0,177$.

(b) Indique qué conclusión se debería extraer de este valor del parámetro p, en el contexto de la pregunta. [1]

(c) A continuación, el profesor le pide a Anne los valores del estadístico t y del coeficiente de correlación momento-producto r generados por la calculadora, pero ella los ha borrado. Partiendo del valor del parámetro p, calcule estos valores de t y r. [5]